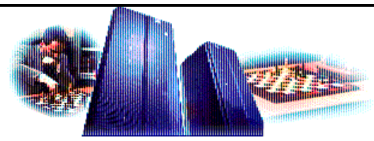
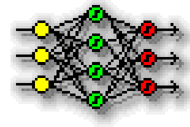



Sistemi Intelligenti Reinforcement Learning

Alberto Borghese

Università degli Studi di Milano
Laboratorio di Sistemi Intelligenti Applicati (AIS-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it


Chapter 2 – Barto Sutton

Riassunto

- Gli agenti ed il Reinforcement Learning
- Apprendimento nel condizionamento classico
- Implementazione ricorsiva
- Caso non stazionario

L’agente intelligente

- Inizialmente l’attenzione era concentrata sulla progettazione dei sistemi di “controllo”. Valutazione, sintesi…
- L’intelligenza artificiale e la “computational intelligence” hanno consentito di spostare l’attenzione sull’apprendimento delle **strategie di controllo** e più in generale di comportamento **(planning, control, search, choice, prediction, classification, generative AI …)**. Sono tutti modelli utilizzati in modo forward.
- Macchine dotate di meccanismi (algoritmi, SW), per apprendere queste strategie (identificazione dei modelli).
- RPA – Robot Process Automation

Come acquisire l’intelligenza

L’agente **interagisce con l’ambiente** che fornisce **stimoli**. Abbiamo una macchina capace di trasformare gli stimoli in azioni.

Esperimenti di Ivan Pavlov (Nobel medicina nel 1904).

Quando un cane vede la ciotola del cibo inizia a salivare.

Si fa partire un metronomo poco prima della presentazione del cibo.

Dopo poco tempo il cane inizia a salivare appena vede/sente il metronomo.

Alla base del dog training. Perchè non applicarlo anche alle macchine?

Osservazioni

Agent

Conditioning stimulus

Unconditioned stimulus

Triggering of behaviour (or choice) that is most adequate to what?

Key is the **reward**. I cani sono molto golosi…

Lo stimolo condizionato funziona, perchè per gli esseri viventi (e la "lentezza" della risposta del sistema nervoso) è fondamentale **anticipare**.

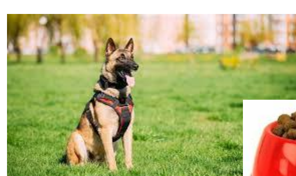
Occorre avere uno stimolo per apprendere (motivazione).

Framework dell'apprendimento

- **Un agente interagisce con l'ambiente.**
- Può **scegliere un'azione** sull'ambiente tra un insieme continuo o discreto (qui il cane può mangiare, oppure può continuare a correre, …).
- L'agente monitora l'ambiente (**input**). In questo caso il cane vede (e annusa) l'ambiente intorno, ma sente anche il metronomo.
- La scelta dell'azione è non banale e richiede un certo grado di "intelligenza". Il cane «capisce» che mangiare dà più reward di continuare a correre.
- L'agente è in grado di modificare il proprio comportamento (dopo un po' di tentativi, il cane inizia a salivare (a prepararsi al pranzo) al suono del metronomo).

Un agente sceglie la propria azione in funzione del reward che ottiene dall'ambiente.

Il reward deve essere sufficientemente vicino nel tempo e associabile all'azione.



Apprendimento mediante RL

- L’agente deve scegliere un’azione, a (tra diverse azioni possibili discrete o continue).
- L’agente misura la ricompensa, r (reward), associata alla sua azione.

r

a

- L’agente deve scoprire autonomamente quale azione dà un reward massimo.

- Apprendimento all’interno di un singolo trial.

Reinforcement learning

Spesso si ha a disposizione solamente un’informazione qualitativa di ricompensa, **detta reward**, (a volte binaria, giusto/sbagliato successo/fallimento), **puntuale** fornita dall’ambiente.

Apprendimento con rinforzo è un apprendimento attraverso reward non attraverso istruzioni.

*L’informazione di ricompensa disponibile si chiama **segnale di rinforzo.** Non dà alcuna informazione su come aggiornare il comportamento dell’agente (e.g. i parametri del modello di scelta, controllo,…), non è **istruttiva**. Non è possibile definire una funzione costo o un gradiente.*

*Il reward è un’informazione qualitativa che dà una **valutazione**.*

Obbiettivo: creare degli agenti “intelligenti” che abbiano una “machinery” per apprendere dalla loro esperienza, dalla valutazione ricavare delle istruzioni su come migliorare le azioni.

L’**ambiente** viene considerate **stocastico** (non si conosce il suo comportamento e il suo comportamento non è stereo-tipato).

Reward

Il reward è il cibo!

Il cibo non dice al cane esplicitamente che è meglio mangiare di continuare a correre. Ma il cibo dà una soddisfazione maggiore del correre.

Di conseguenza il cane, decide di mangiare invece di andare a correre in futuro. Alla base del dog training!

Il reward non istruisce il cane su cosa fare (molto diverso dall'apprendimento supervisionato che vedremo: classificazione e regressione)

Il reward dà un'informazione **qualitativa** sull'azione , non **istruttiva**.

E' il cane che deve capire come utilizzare questa informazione qualitativa per migliorare le proprie azioni.

Esempio applicativo

Dove posizionare gli avvertimenti pubblicitari? Quanto valgono?

Ogni click sull'avvertimento è un rinforzo positivo.

L'agente prova diverse posizioni. Cerca di massimizzare il reward, cioè il numero di click.

Modelli evoluti (forgetting, interazione tra posizioni, vincoli degli altri componenti…).

Come migliorare l'azione

- L'agente deve scegliere un'azione, a (tra diverse azioni possibili discrete o continue).
- L'agente misura le ricompensa, r (reward) associata alla sua azione.

a

r

Evaluate the implemented solution.

- Success or fail? Adequate or not adequate?
- How much adequate? How to measure the success or failure of the performance?
- Optimization of the performance to create better agents.

Riassunto

- Gli agenti ed il Reinforcement Learning
- Apprendimento nel condizionamento classico
- Implementazione ricorsiva
- Caso non stazionario

Schematic diagram of an agent

Agent

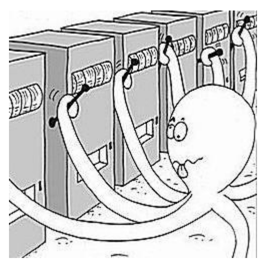
What action should I do now?

Reward (r)

a

Environment

Il problema del "n-Armed bandit"



Selezione di una tra n macchine.
Scelta tra n azioni (**policy** dell'agente)
Situazione iniziale sempre uguale.

Il ciclo: azione + reward esaurisce l'episodio - trial)

La richiesta di scegliere viene ripetuta più volte nel tempo. Ogni volta si riparte dalla stessa situazione (**problema stazionario**).

La ricompensa è **stocastica** (e.g. slot machine).

Obbiettivo: viene massimizzata la **ricompensa media a lungo termine**.

Come selezionare l'azione che fornisce la massima ricompensa a lungo termine se non si conoscono le macchine? (la statistica delle macchine?)

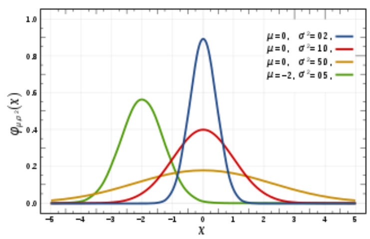
Slot machine stocastica

Il reward della slot machine è completamente definito dalla densità di probabilità associata alla singola macchina.

Si suppone la densità di probabilità del reward **costante nel tempo** e **NON NOTA**.

Per semplicità si suppone che la densità di probabilità sia descrivibile da una funzione analitica, ad esempio una Gaussiana. In questo caso la densità di probabilità è definita dai parametri della Gaussiana: media e standard deviation, non noti all'utente.

Potrei estrarre un reward +0.1 dalla Gaussiana verde (ben dentro la coda destra) e -1 dalla Gaussiana blu (dentro la coda sinistra) con probabilità diversa da zero. Sono valori molto lontani dal reward medio.



Come massimizzare la ricompensa

Consento all'agente di avere memoria.

Memorizzo il valore associato alle diverse azioni.

Posso ad un certo punto scegliere SEMPRE l'azione che mi ha dato la **Ricompensa maggiore**.

Scelgo cioè l'azione **GREEDY (Greedy = Goloso).**

Sfruttiamo cioè la conoscenza raggiunta fino a quel momento (**Exploitation**).

Perché dovremmo scegliere un'azione che non appare la migliore (NON GREEDY)?

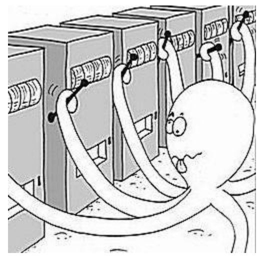
Perché dovremmo esplorare altre azioni che non hanno dato la ricompensa maggiore?

Exploration

Perchè esploriamo soluzioni diverse?

La ricompensa **non è deterministica**. Nel lungo termine, potremmo ottenere di più con altre azioni.

Quello che conta non è la ricompensa istantanea ma la somma delle ricompense ottenute nel tempo. Voglio massimizzare il mio guadagno a lungo termine, ad esempio dopo avere premuto 1000 volte un braccio.



Occorre quindi mantenere un istinto ad esplorare azioni diverse.

Il bilanciamento tra "exploration" e "exploitation" è un compito complesso.

Exploration vs Exploitation

Esplorazione (**exploration**) dello spazio delle azioni per scoprire le azioni migliori. Un agente che esplora solamente raramente troverà una buona soluzione.

Le azioni migliori vengono scelte ripetutamente (**exploitation**) perchè garantiscono ricompensa (**reward**). Se un agente non esplora nuove soluzioni potrebbe venire surclassato da nuovi agenti più dinamici.

Occorre non interrompere l'esplorazione.

Occorre un approccio statistico per valutare le bontà delle azioni.

Exploration ed exploitation vanno bilanciate. Come?

Qual è il comportamento ottimale?

La Value Function e la scelta delle azioni

Razionale: associare un **valore** alle diverse azioni e **scegliere** l'azione secondo il loro valore.

Il reward istantaneo non può rappresentare il valore perchè rappresenta 1 singolo campione estratto da una distribuzione statistica.

Devo cercare qualcosa di più significativo. Per esempio il **reward medio**.

Posso scegliere come valore, la **media campionaria ==> funzione valore** (value function).

La **funzione valore** viene costruita dall'**agente** a partire dai reward istantanei forniti dall'**ambiente**. E' l'elemento chiave nell'apprendimento con rinforzo.

La funzione valore caratterizza l'apprendimento con rinforzo.

La Value Function e la scelta delle azioni

Posso selezionare n-azioni: $a = a_1 \ldots a_n$. **Policy, π.**

In funzione dell'**azione**, la macchina mi darà un **reward**, $r(a_k)$, non noto a-priori.

Posso valutare le diverse azioni al tempo t attraverso la media campionaria dei reward associati a ciascuna azione: **funzione valore** (value function):

$$Q_{t(a_k)} = \frac{r_{1(a_k)} + r_{2(a_k)} + r_{3(a_k)} + \cdots + r_{N(a_k)}}{N(a_k)}$$

Per il teorema del limite centrale il valore medio campionario dei reward tende al valore medio della distribuzione dei reward per N-> oo.

$$\lim_{N(a_k)\to\infty} Q_{t(a_k)} = Q^*(a_k) = E[r_{ak}] = \mu_k$$

Voglio scegliere a_k che massimizza la somma degli r_k: $Q(a_k)$.
$Q(a_k)$ può essere vista come un'approssimazione di μ_k.

Caratteristiche della Value Function

Value function calcolata come media campionaria:

$Q_t(a_k)$ -> $Q^*(a_k)$ per t -> ∞

$Q_t(a_k) = 0 \quad t = 0$. Nessuna stima disponibile.

Come calcolo $Q_t(a_k)$? $a^* : Q_t(a^*) = \max_{a_k} \{Q_t(a_k)\}$

A ogni istante t, posso selezionare l'azione, a_k, che dà la massima Value Function al tempo t:

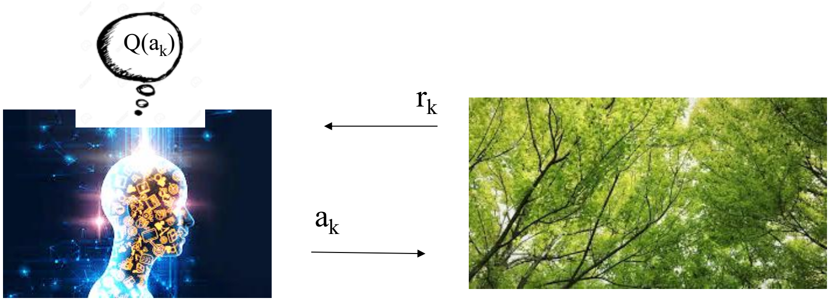
Così viene **EXPLOITED** la conoscenza accumulata, è una politica GREEDY.

Non vengono esplorate soluzioni alternative, calcolo solo $Q_t(a_k)$

Come si può formalizzare un'alternativa?

Interazione rivista

- L'agente deve scegliere un'azione, a_k (tra diverse azioni possibili discrete o continue) in base al loro valore stimato. a_k: $\max\{Q_t(a_k)\}$.
- L'agente misura le ricompensa, r_k (reward) associate alla sua azione.
- L'agente costruisce una stima del valore di ciascuna azione, a_k: $Q_t(a_k)$.
- Prende una decisione in base a $Q_t(a_k)$, reward secondario, a lungo termine.
- Apprendimento all'interno di un singolo trial.



Politiche ε–Greedy

Scelgo l'azione che dà al Q_t massima (greedy) con probabilità **P = 1 - ε**
Con probabilità piccola, **ε**, viene scelta un'azione diversa.

$$a^* : Q_t(a^*) = \max_{a_k}\{Q_t(a_k)\} \qquad P = 1 - \varepsilon$$

$$a \neq a^* \qquad P = \varepsilon$$

L'azione non greedy viene scelta con probabilità uniforme tra le n possibili azioni a disposizione.

$Q_t(a_k) \rightarrow Q^*(a_k) \quad t \rightarrow \infty$

Near-greedy policy. ***Mantengo una certa capacità di esplorazione***

Beyond ε-greedy: pursuit methods

Dopo ogni episodio, la probabilità di scegliere un'azione viene aggiornata:

- L'azione associata alla value function migliore **aumenta la probabilità** di essere prescelta.
- La probabilità di scegliere le altre azioni viene **decrementata**.
- Chiamo π(a) la probabilità di scegliere l'azione a.

$$\pi_{t+1}\left(a^*_{t+1}\right) = \pi_t\left(a^*_{t+1}\right) + \beta\left[1 - \pi_t\left(a^*_{t+1}\right)\right]$$
$$\pi_{t+1}\left(a\right) = \pi_t\left(a\right) + \beta\left[0 - \pi_t\left(a\right)\right] \quad for\ a \neq a^*_{t+1}$$

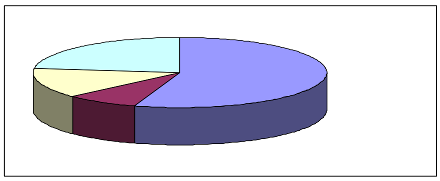
The preference for an action is always "**pursuing**" (inseguendo) the action that is greedy according to the current action-value estimate.

La probabilità di scegliere l'azione "migliore" aumenta con t (diminuisce l'exploration, aumenta l'exploitation).

Approccio generale della roulette

Le azioni vengono selezionate proporzionalmente ad una misura di performance nel momento attuale. Migliore essa è e più alta è la probabilità di selezione.

1. Si immagini una roulette di area unitaria, dove siano sistemate tutte le possibili azioni,.
2. La dimensione del settore della roulette associata a ogni azione è proporzionale al valore di misura di performance di ciascuna azione.
3. La pallina viene lanciata all'interno della roulette e la possibilità che cada in una qualsiasi posizione è uniforme.
4. L'azione in corrispondenza della quale si ferma è quella selezionata



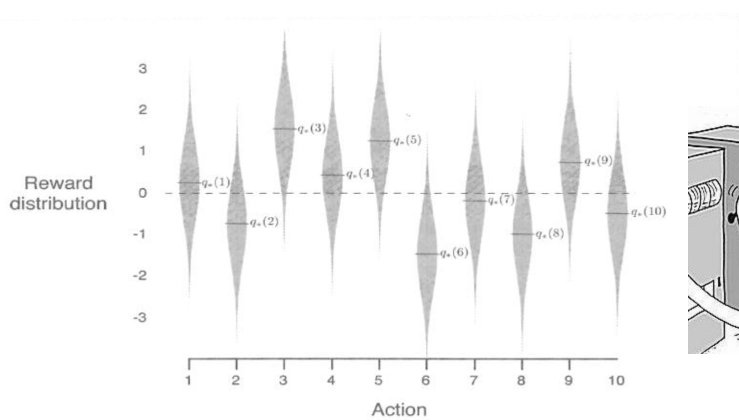
In questo esempio ci sono 4 possibili azioni.

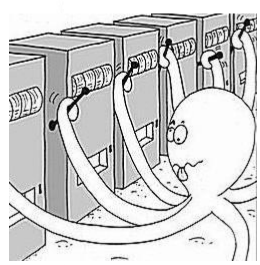
n-armed bandit problem

n-armed bandit problem: n = 10: $a = a_1, a_2 \ldots, a_k, .. a_{10}$.

Reward:

- Valor medio di ogni azione viene estratto da una Gaussiana con media zero e varianza = 1.
- Valore del reward estratto da una Gaussiana con media definite sopra e varianza = 1.



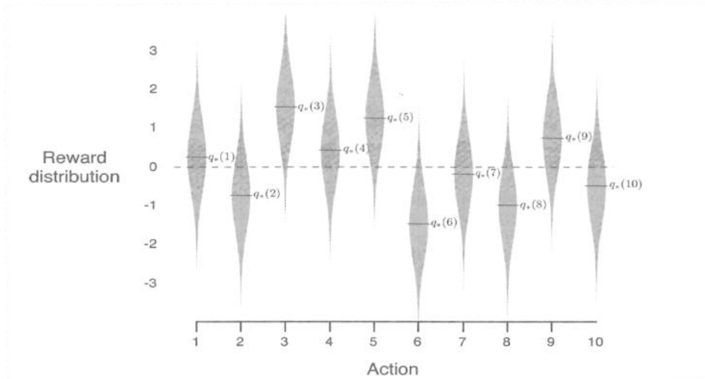


Analisi del problema

Iniziamo prendendo l'azione 4: $a_{t=0} = a_4$. Supponiamo di ricevere un reward pari a 0.1.

$Q(a_1) = Q(a_2) = Q(a_3) = Q(a_5) = Q(a_6) = Q(a_7) = Q(a_8) = Q(a_9) = Q(a_{10}) = 0 \qquad Q(a_4) = 0.1$

$a^* : Q_t(a^*) = \max_{a_k}\{Q_t(a_k)\}$ ⟹ We may be stuck on a_4.



Esempio: risultati su 10-armed bandit

n-armed bandit problem: n = 10: $a = a_1, a_2 \dots, a_k, .. a_{10}$.

Eseguo 2000 task (esperimenti).

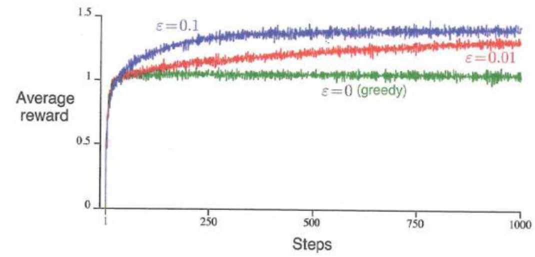
Per ogni task (esperimento), eseguo 1000 volte la scelta di un'azione:

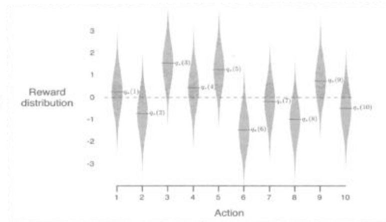
$t = t_1, t_2 \dots.. t_{1000}$.
$a = a(t_1), a(t_2) \dots.. a(t_{1000})$
$r = r(a(t_1)), r(a(t_2)) \dots.. r(a(t_{1000}))$

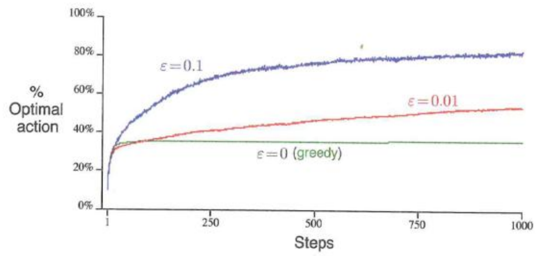
Valuto la performance dopo le 1000 giocate di ogni task (trial).

Viene fatta la media sulla performance (total reward) calcolata alla fine dei 2000 task.

Risultati

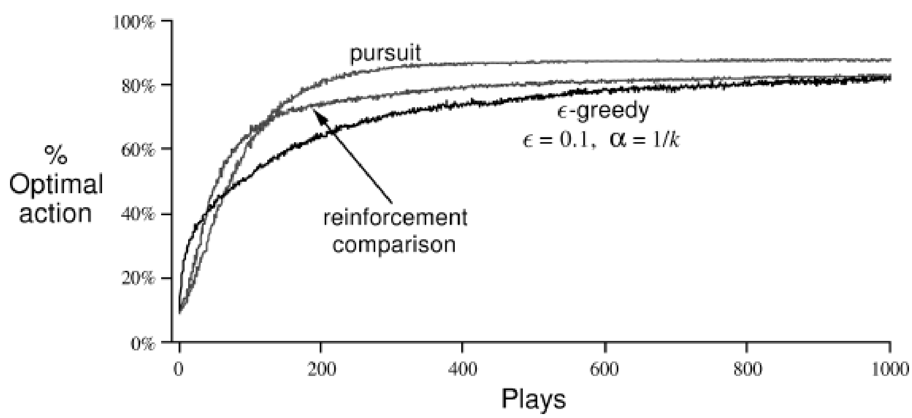






Si potrebbe implementare una politica **ε-greedy variabile**: ε↓ #Plays↑

Performance of pursuit action choice



Performance of the pursuit method vis-á-vis action-value and reinforcement comparison methods on the 10-armed testbed.

Domande

Supponiamo che la distribuzione da cui si sceglie il valore medio del reward abbia varianza nulla. Quale metodo funziona meglio: Greedy o ε-Greedy?

Supponiamo che la distribuzione da cui si sceglie il valore medio del reward abbia varianza maggiore (e.g. = 10). Cosa succede? Quale metodo si comporterebbe meglio?

In quali altre condizioni sarebbe utile avere esplorazione?

Riassunto

- Gli agenti ed il Reinforcement Learning
- Apprendimento nel condizionamento classico
- Implementazione ricorsiva
- Caso non stazionario

Calcolo ricorsivo di Q(.)

$$Q_t(a_k) = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_{N(a_k)}}{N(a_k)}$$

Occorre scegliere un algoritmo che calcoli $Q_t(.)$ con un piccolo carico computazionale e di memoria.

Supponiamo di fare Exploitation dell'azione a_k. Calcoliamo la media dei reward dopo N reward e la chiamiamo $Q_N(a_k)$. $Q_N(a_k)$ coinciderà con la media delle prime $N(a_k)$ ricompense associate all'azione a_k :

$$Q_{N(a_k)} = \frac{r_{1(a_k)} + r_{2(a_k)} + r_{3(a_k)} + \cdots + r_{N(a_k)}}{N_{(a_k)}}$$

Scegliendo ancora a_k, otteniamo il reward $r_{N+1}(a_k)$ e il seguente valore di Q dopo N+1 reward:

$$Q_{N+1(a_k)} = \frac{r_{1(a_k)} + r_{2(a_k)} + r_{3(a_k)} + \cdots + r_{N(a_k)} + r_{N+1(a_k)}}{(N+1)\ (a_k)}$$

Determinazione ricorsiva di Q_N

$$Q_N(a_k) = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_N}{N} \qquad Q_{N+1}(a_k) = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_N + r_{N+1}}{N+1}$$

$$Q_{N+1} = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} = \frac{Q_N N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} =$$

$$\frac{Q_N(N+1-1)}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} = \frac{Q_N(N+1) - Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} \Rightarrow$$

$$Q_{N+1} = Q_N - \frac{Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1}$$

Dipende da N + 1

Non dipende da N + 1

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}(r_{N+1} - Q_N)}$$

Osservazioni su Q_N

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}(r_{N+1} - Q_N)}$$

L'agente ragiona sul trial attuale.

Dipende da solo da quantità:
- all'istante N abbiamo Q_N
- all'istante N+1 abbiamo N+1, r_{N+1}

NB N è il numero di volte in cui è stata scelta a_k, non è necessariamente coincidente con il tempo t!

Occupazione limitata della memoria.
Considero solo quello che avviene all'interno di un trial.
Il passato che mi interessa è riassunto da Q_N

Q_{N+1} rappresenta la media dei reward {r(a_k)}, tutti pesati 1/N+1

Formulazione generale di Q_N

$$Q_{N+1} = Q_N - \frac{Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} = \boxed{Q_N + \alpha\left[r_{N+1} - Q_N\right]} \qquad \alpha = 1/(N+1)$$

$$Q_{N+1} = Q_N - \frac{Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} = Q_N + \alpha[r_{N+1} - Q_N]$$

Questa forma è la base del RL. La sua forma generale è:

NewEstimate = OldEstimate + StepSize [Target – OldEstimate]
*NewEstimate = OldEstimate + StepSize * Error.*

StepSize = α = 1/(N+1)

α pesa il bilanciamento tra "innovazione" e "tradizione"

Osservazione:
Se α = 0, conta solo la funzione valore (considera solo il passato).
Se α = 1, Q_{N+1} assume il valore di Q_N (dimentica tutto il passato).

Formulazione generale dell'aggiornamento

$$Q_{N+1} = \boxed{Q_N + \alpha[r_{N+1} - Q_N]}$$

NewEstimate = OldEstimate + StepSize [Target – OldEstimate]
*NewEstimate = OldEstimate + StepSize * Error.*
α pesa il bilanciamento tra "innovazione" e "tradizione"

$$Q_{N+1} = Q_N + \alpha[r_{N+1} - Q_N] = \boxed{(1-a)Q_N + \alpha\, r_{N+1}}$$

*NewEstimate = (1-α) *OldEstimate + α NewValue*
Combinazione lineare della stima e del nuovo valore
α pesa il bilanciamento tra "innovazione" e "tradizione"

Esempio

$$Q_{N+1} = Q_N - \frac{Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}\left(r_{N+1} - Q_N\right)$$

	$r_1 = 2$	$r_2 = 3$	$r_3 = 7$	$r_4 = 2$
$Q_0 = 0$	$Q_1 = 2$	$Q_2 = 2{,}5$	$Q_3 = 4$	$Q_4 = 3{,}5$

$$Q_3 = Q_2 + \frac{1}{3}\left(r_3 - Q_2\right)$$

$Q_3 =$ 2,5 + 1/3 (7 - 2,5) = 2,5 + 1,5 = 4,0

$Q_4 =$ 4 + 1/4 (2 - 4) = 4 – 0,5 = 3,5

Caso stazionario

$$Q_{N+1} = \frac{r_1 + r_2 + ... + r_N + r_{N+1}}{N+1}$$

Il peso di ciascun campione è pari a 1/(N+1)

$$Q_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{r_i}{N_{k+1}}$$

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N - \frac{Q_N}{N+1} + \frac{r_{N+1}}{N+1}}$$

Ogni nuovo campione viene pesato con 1/(N+1)

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}(r_{N+1} - Q_N)}$$

Peso decrescente (con 1/(N+1)) dei nuovi campioni

$$Q_{N+1} = Q_N + \alpha\left[r_{N+1} - Q_N\right]$$

α = 1/(N+1)

Riassunto

- Gli agenti ed il Reinforcement Learning
- Apprendimento nel condizionamento classico
- Implementazione ricorsiva
- Caso non stazionario

Stazionarietà

Situazione in cui il decorso del tempo lascia invariate le condizioni fondamentali del sistema.

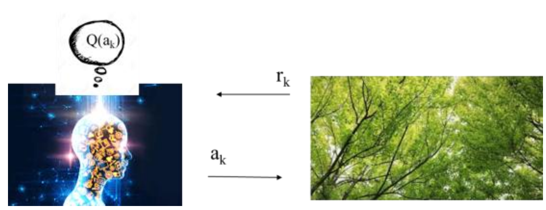
L'agente non deve essere stazionario: deve imparare!

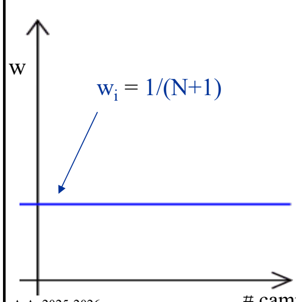
L'ambiente non stazionario varia la distribuzione statistica dei reward nel tempo.

Caso stazionario - proprietà

$$Q_{t(a_k)} = \frac{r_{1(a_k)} + r_{2(a_k)} + r_3 + \cdots + r_{N(a_k)} + r_{N+1(a_k)}}{(N+1)(a_k)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{r_i(a_k)}{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} w_i r_i(a_k)$$





Somma: peso tutti i campioni **allo stesso modo**: $w_i = 1/(N+1)$

Caso stazionario – formulazione ricorsiva

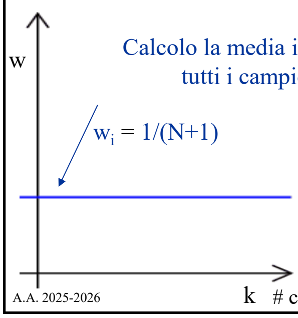
$$Q_{t(a_k)} = \frac{r_{1(a_k)} + r_{2(a_k)} + r_3 + \cdots + r_{N(a_k)} + r_{N+1(a_k)}}{(N+1)(a_k)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{r_i(a_k)}{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} w_i r_i(a_k)$$

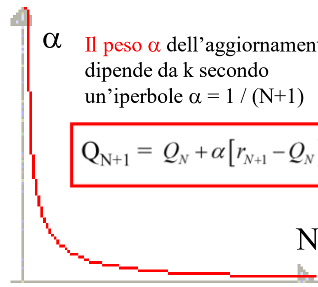
$Q_{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}(r_{N+1} - Q_N)$

Calcolo la media in modo ricorsivo, in cui i pesi di tutti i campioni sono uguali a 1/(N+1).

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \frac{1}{N+1}(r_{N+1} - Q_N)}$$



Calcolo la media in modo ricorsivo, in cui i pesi di tutti i campioni sono uguali a 1/(N+1).



Il peso α dell'aggiornamento dipende da k secondo un'iperbole α = 1 / (N+1)

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \alpha[r_{N+1} - Q_N]}$$

Somma: peso tutti i campioni allo stesso modo: $w_i = 1/(N+1)$

$\alpha = 1 / (N+1)$

Caso non stazionario

$$\boxed{Q_{N+1} = Q_N + \alpha[r_{N+1} - Q_N]}$$

$$\boxed{Q_{N+1} = \alpha\, r_{N+1} + (1-\alpha)\, Q_N}$$

Al tempo N+1, ottengo r_{N+1}

Q_0 è il valore a cui è inizializzata Q

Suppongo α = cost ➔ $\alpha_{N+1} = \alpha\ \forall k \qquad 0 \le \alpha \le 1$

In precedenza la costante era $\alpha_{N+1} = 1/(N+1)$

$$\begin{aligned} Q_N &= Q_{N-1} + \alpha[r_N - Q_{N-1}] = \\ &= \alpha r_N + (1-\alpha)Q_{N-1} = \\ &= \alpha r_N + (1-\alpha)[\alpha r_{N-1} + (1-\alpha)Q_{N-2}] = \\ &\alpha r_N + (1-\alpha)\alpha r_{N-1} + (1-\alpha)^2 Q_{N-2}] = \end{aligned}$$

$$(1-\alpha)^0\alpha\, r_N + (1-\alpha)^1\alpha\, r_{N-1} + (1-\alpha)^2\alpha\, r_{N-2} + \ldots + (1-\alpha)^{N-1}\alpha\, r_1 + (1-\alpha)^N Q_0$$

Caso non stazionario

$$\boxed{Q_N = \alpha r_N + (1-\alpha)Q_{N-1}}$$

Al passo N, ottengo r_N
Q_0 è il valore a cui è inizializzata Q

Suppongo α = cost ➔ $\alpha_k = \alpha \ \forall k$ $\quad 0 \le \alpha \le 1$

$$\alpha r_N + (1-\alpha)\alpha r_{N-1} + (1-\alpha)^2 \alpha r_{N-2} + ... + (1-\alpha)^{N-1}\alpha r_1 + (1-\alpha)^N Q_0 =$$
$$(1-\alpha)^0 \alpha r_N + (1-\alpha)^1 \alpha r_{N-1} + (1-\alpha)^2 \alpha r_{N-2} + ... + (1-\alpha)^{N-1}\alpha r_1 + (1-\alpha)^N Q_0$$

Per r_i $\quad 1 \le i \le N \quad r_1 \to r_N$
Per $(1 - \alpha)^{N-i}$ $\quad 1 \le i \le N \quad (1 - \alpha)^{N-1} \to (1 - \alpha)^0$

$$Q_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha(1-\alpha)^{N-i} r_i + (1-\alpha)^N Q_0$$

Osservazioni

$$\boxed{Q_{N+1} = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha(1-\alpha)^{N-i} r_i} = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$\boxed{w_i = \alpha(1-\alpha)^{N-i} \qquad \alpha < 1}$$

I reward **non** sono pesati tutti allo stesso modo: weighted average.

Il **peso di ciascun campione decresce esponenzialmente** a partire da i = N (tempo presente, $w_N = \alpha$) fino a i = 1 (tempo iniziale $w_1 = \alpha (1-\alpha)^{(N-1)}$), secondo:

$$\alpha(1-\alpha)^{N-i} \qquad \alpha < 1$$

Voglio calcolare il reward totale, *pesando i vecchi campioni sempre meno*?
Media pesata, con peso derescente nel tempo.

E.g. weight decay:
$\alpha = 0.8*(1-0.8)^0$ for i=N, ➔ *$\alpha = 0,2$*
$\alpha = 0.8*(1-0.8)^{N-1}$ for i=1 ➔ *$\alpha = 0,0000004096$, for N = 10*
$\alpha = 0.8*(1-0.8)^N$ for i=0 ➔ *$\alpha = 0,0000001024$, for N = 10*

α aumenta

A ***Recency-weighted average.***

Esempio

$$Q_{N+1} = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha(1-\alpha)^{N-i} r_i \quad = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$w_i = \alpha(1-\alpha)^{N-i} \alpha < 1$$

Il **peso di ciascun campione decresce esponenzialmente** a partire da i = N (tempo presente, $w_N = \alpha$) fino a i = 1 (tempo iniziale $w_1 = \alpha(1-\alpha)^{(N-1)}$), secondo: $\alpha(1-\alpha)^{N-i}$ $\alpha < 1$

E.g. weight decay (for N=10):
α *= 0.8*(1-0.8)^0 for i=N, → α = 0,8*
α *= 0.8*(1-0.8)^1 for i=N-1 → α = 0,16*
α *= 0.8*(1-0.8)^2 for i=N-2 → α = 0,032*
….
α = 0.8(1-0.8)$^{N-1}$ for i=1 → α = 0,0000004096*
α = 0.8(1-0.8)^N for i=0 → α = 0,0000001024*
Recency-weighted average.

α Aumenta

α = 0,8, close to 1, fast weight decay

A.

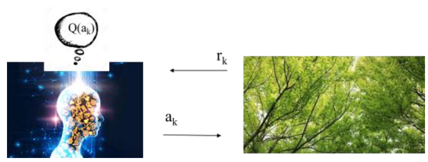
http:\\borghese.di.unimi.it\

47

Osservazioni

$$Q_{N+1} = Q_N + \alpha_{N+1}(r_{N+1} - QN)$$

L'agente ragiona sul trial attuale, N -> N+1.
Dipende da solo da Q_N e r_{N+1}
Q_N rappresenta le media pesata dei primi N reward



$$Q_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha(1-\alpha)^{N-i} r_i + (1-\alpha)^N Q_0 \qquad Q_{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{N+1} r_i$$

$$Q_{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{r_i(a_k)}{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} w_i r_i(a_k)$$

Peso, w_i, esponenziale decrescente
α_{N+1} = costante = α ∀N

Peso, w_i, costante
α_{N+1} = 1/(N+1)

A.A. 2025

ghese.di.unimi.it\

48

Somma dei pesi dei reward è unitaria

$$Q_{N+1} = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha (1-\alpha)^{N-i} r_i$$

$$i = 1 \rightarrow (1-\alpha)^{N-1}$$

$$i = N \rightarrow (1-\alpha)^{0}$$

Riscrivo considerando solamente i coefficienti.

Pongo i = N – i, la somma diventa da 0 a N-1:

$$\alpha \sum_{i=0}^{N-1} (1-\alpha)^i \; + (1 - \alpha)^N \quad =$$

Somma di una successione geometrica: $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} r^i = \frac{1-r^N}{1-r}$

$$\alpha \frac{1-(1-\alpha)^N}{1-(1-\alpha)} + (1 - \alpha)^N = \frac{\alpha - \alpha(1-\alpha)^N + (1-\alpha)^N \square (1-\alpha)^N + \alpha(1-\alpha)^N}{1-1+\alpha} = 1 \quad \text{cvd}$$

Condizioni iniziali

$$Q_{N+1} = (1-\alpha)^N Q_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha (1-\alpha)^{N-i} r_i$$

Metodi ad $\alpha = 1/N_{k+1}$, Q_0 non viene utilizzato se non al primo passo, viene poi sostituito da Q_1.

Metodi ad α costante, Q_0, conta sempre meno, ma la polarizzazione è permanente ($Q_0 = 0$).

Q_0 può essere utilizzato per fornire della **conoscenza a-priori** o per favorire l'esplorazione (e.g. transfer learning).

Come posso gestire una situazione in cui la slot machine cambia improvvisamente la sua densità di probabilità di reward?

Pseudo-codice per il calcolo di Q_k.

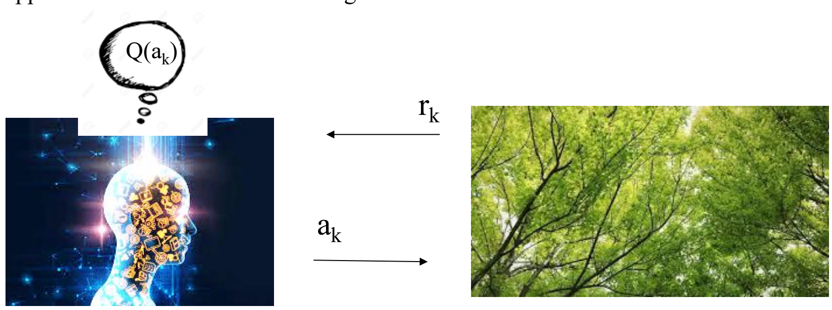
```
####### 1) Definizione delle variabili:
N_scelte = m; eps_gready = 0.1;          // epsilon dipende dal grado di greedy che voglio dare all'agente
            ## Variabili dell'agente
A = {1, 2,    m};                        // Azioni possibili
Q = {Q1, Q2 ….. Qm} = 0;                 // Value function per ogni azione
N_azioni = {1, 2, …… m}                  // Numero di volte in cui è scelta l'azione j (e collezionato il reward associato).
            ## Variabili dell'ambiente. Date nella simulazione, misurate nell'ambiente nella realtà
// Inizializzo i parametri della distribuzione (stazionaria) dei reward per ogni azione
meanReward = [mean_1, mean_2, ….. mean_m]; stdReward = [std_1, std_2, ….. std_m];

###### 2) Ciclo di funzionamento
while (true)
{           eps = rand_unif([0 1]);                 // Per politica epsilon-greedy
    // Exploitation
            [a_attuale Q_attuale] = SearchMax(Q);   // Cerca l'azione ottima secondo Q
    // Exploration: se eps < eps_gready, allora exploration
            if (eps < epsilon_gready)
            // Devo trovare un'azione diversa da a_attuale -> a_ref
            {           trovato = false; a_ref = a_attuale;
                        while (trovato == false)
                        {           a_attuale = rand_unif(A);
                                    if (a_attuale != a_ref)
                                    {  trovato = true; Q_attuale = Q(a_attuale);
                                    }
                        }
            }
    // Eseguo l'azione a_attuale e misuro il reward ottenuto dalla slot machine
            r_attuale = rand_Gauss[meanReward(a_attuale), stdReward(a_attuale)];
    // Update i dati per l'azione a_attuale: il numero di azioni e la value function Q
            N_azioni(a_attuale)++;
            Q(a_attuale) = Q(a_attuale) + 1/[N_azioni(attuale)] * (r_attuale – Q(a_attuale));
}
```


RL su trial

- L'agente deve scegliere un'azione, a_k (tra diverse azioni possibili discrete o continue) in base al loro valore stimato. a_k: $\max\{Q_t(a_k)\}$ (*max, ε-greedy, pursuit…*).
- L'agente misura le ricompensa, r_k (reward) associate alla sua azione.
- L'agente costruisce una stima del valore di ciascuna azione, a_k: $Q_t(a_k)$.

- Prende una decisione in base a $Q_t(a_k)$, reward secondario, a lungo termine.
- Apprendimento all'interno di un singolo trial.



Riassunto

- Gli agenti ed il Reinforcement Learning
- Apprendimento nel condizionamento classico
- Implementazione ricorsiva
- Caso non stazionario